

НЕСОРАЗМЕРНЫЕ И ФЛУКТУИРУЮЩИЕ СТРУКТУРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЗЕМНОЙ РЕАЛЬНОСТИ

Г.В. Жижин

Участник проекта «Сколково» ООО «Адамант», Санкт-Петербург, Россия

Эл. почта: genzhizhin@gmail.com

Статья поступила в редакцию 16.05.2014; принята к печати 27.08.2014

Рассматриваются закономерности существования в природных телах (кристаллах, рудных телах, живых организмах) сложно организованной материи: несоизмеримых и флуктуирующих структур. Основной анализ проводится на основе данных по исследованию квазикристаллов в силу преобладающего количества экспериментальных и теоретических исследований в этой области. Используются методы геометрического анализа электронных дифрактограмм и теория фазового перехода 2-го рода с учетом процесса скейлинга. Показано, что дифрактограммы свидетельствуют о том, что несоизмеримые структуры представляют собой 4-мерные образования со скрытой периодичностью и фундаментальной областью в виде «золотого» гиперромбоэдра. Обнаружено, что фазовый переход с изменением структуры для ряда конкретных веществ может сопровождаться флуктуацией структуры в силу отсутствия устойчивого положения равновесия в таких процессах (режим флуктуирующего скейлинга).

Ключевые слова: структура, фрактал, размерность, симметрия, ренормгруппа.

INCOMMENSURABLE AND FLUCTUATING STRUCTURES IN THE TERRESTRIAL SPACE

G.V. Zhizhin

ООО «ADAMANT » participant in the Project «Skolkovo», Saint Petersburg, Russia

E-mail: genzhizhin@gmail.com

Regularities in the presence of a complex mode of organization represented by incommensurable and fluctuating structures in natural bodies, such as crystals, ore bodies and living bodies. The analysis is mostly based on studies of quasi crystals because they provide the bulk of evidence available so far. Methods of geometrical analysis of electron diffraction patterns and second-type phase transitions theory are applied with account of scaling. Diffraction patterns are shown to be consistent with that incommensurable structures are 4D-structures featuring hidden periodicity and fundamental region corresponding to a hyper-rhombhedron having golden-ratio proportions. Phase transitions associated with structural alterations of a number of defined substances were shown to involve structural fluctuations caused by the absence of stable balance conditions during such transitions (fluctuating scaling regimen)

Keywords: structure, fractal, dimensionality, symmetry, renormalization group.

Введение

Несоизмеримые структуры, которые называются также несоизмеримыми или модулированными структурами, широко распространены в природе. К ним относятся жидкие кристаллы (хиральные смектики), квазикристаллы, интерколированные соединения графита (структуры, состоящие из чередующихся слоев углерода и слоев атомов металла), упрочняющиеся сплавы и др. К ним можно также отнести различного рода рудные тела, состоящие, как правило, из многочисленных прослоек и распределенных включений разной формы из разных веществ. Содержание определения «несоизмеримые» состоит в том, что в этих структурах можно выделить некоторую основную структуру с трансляционной симметрией и подструктуру, которая либо не имеет трансляционной симметрии, либо имеет трансляционную симметрию, но ее период несоизмерим с периодом трансляции основной структуры [23]. В обоих случаях общая структура, состоящая из основной и подструктуры, не имеет трансляционной симметрии. Подобные структуры возникают в результате различных воздействий на исходное тело с трансляционной симметрией: тепловых, механических, электрических, магнитных.

Флуктуирующие структуры часто возникают в биологических фрактальных структурах в результа-

те стохастической вариабельности морфогенетических процессов [9, 10].

Понятие пространства земной реальности, введенное В.И. Вернадским [2], и его оценка принципа диссимметрии П. Кюри [13] как инструмента для исследования этого пространства, представляют значительный интерес не только для построения теории горных пород, которой в настоящее время пока не существует [3], но и для понимания процессов биологического морфогенеза [1]. По принципу диссимметрии для явлений земной реальности характерны некоторые отклонения симметрии от предельной симметрии, достижимой мысленно. Горные породы образуются в результате сложных физико-химических и механических процессов, и в этой связи представляет интерес теория фазовых переходов Л.Д. Ландау [14], связывающая уменьшение порядка группы симметрии вещества с происходящими в нем фазовыми переходами, возникающими под влиянием температурных и механических внешних воздействий. Одним из важных подтверждений этой теории являются полученные в последние десятилетия экспериментальные доказательства существования несоизмеримых фаз. Уменьшение порядка группы симметрии характерно также и для живых организмов в процессе их развития [1], причем эти изменения также связываются с фазовыми переходами как

этапами в их развитии. Таким образом, можно утверждать, что уменьшение порядка симметрии есть общее свойство бытия природных тел в пространстве земной реальности. Наиболее изученными (как экспериментально, так и теоретически) являются вопросы изменения структур кристаллических тел. Поэтому в данной работе исследуются несоизмерные структуры кристаллических тел с учетом современных представлений обобщенной кристаллографии [7], наиболее близкие к вопросам теории рудных тел и минералов. Обнаружено, что в кристаллических телах возможны состояния с флуктуирующей структурой [8].

Открытие и исследования квазикристаллов

Открытие в 1982 г. кристаллов, лишенных трансляционной симметрии [31], положило начало многочисленным циклам работ, посвященных экспериментальному исследованию подобных кристаллов, названных «квазикристаллами», и теоретическому анализу, определяющему принципиальные условия, необходимые для существования таких кристаллов. Главной проблемой здесь было доказать, что отсутствие трансляционной симметрии не противоречит существованию кристалла, несмотря на то, что она обязательна в классических представлениях о кристаллах. Многими исследователями отмечалось (см., например, [23]), что отсутствие видимой строгой периодичности квазикристаллов не означает хаотичность (случайность) их структур. В качестве приближения их структуры могут быть описаны в понятиях почти периодических функций [17]. Почти периодические (или квазипериодические, аперриодические) функции возникают при одновременном участии периодических функций с несоизмеримыми периодами (выражающимися иррациональными числами). Почти периодичность функции состоит в том, что при сдвиге по независимой переменной на некоторый шаг функции не слишком сильно отличаются друг от друга. Было показано, что для получения четкой дифракционной картины не обязательно иметь строгую периодичность кристалла, а достаточно почти периодичности структуры кристалла. Причем дифракционная картина сохраняет свой вид при различных видах модуляции периодических структур иррациональными числами. Важно, что почти периодические функции не противоречат запрещенным в строго периодической структуре осям 5-го и 10-го порядков, наблюдаемым в дифрактограммах квазикристаллов. Наличие этих осей в дифрактограммах квазикристаллов привело к попыткам объяснить структуру квазикристаллов с помощью представлений о выпуклых многогранниках с осями 5-го порядка, то есть икосаэдрах и додекаэдрах [32]. Много работ было посвящено попыткам использовать для качественного объяснения дифрактограмм квазикристаллов замощение плоскости ромбами, введенными Р. Пенроузом [29]. Однако икосаэдры не могут заполнить трехмерное пространство без щелей и зазоров, и поэтому описание дифрактограмм квазикристаллов с помощью икосаэдров невозможно, а в качестве геометрических элементов ромбы замощений Пенроуза в дифрактограммах отсутствуют. В 1985 г. Л. Полинг [30] предложил объяснить кажущуюся икосаэдрическую симметрию дифрактограмм многократным

двойникованием кубических кристаллов. Он основывал свои аргументы лишь на радиальном распределении интенсивностей пятен дифрактограмм. Однако эта модель противоречит микрофотографиям высокого разрешения и дифрактограммам, показывающим распределения пятен, отличные от предложенных Л. Полингом [20]. В последние годы для описания пятен дифрактограмм квазикристаллов получило свое продолжение применение разложений функций в ряд Фурье, которое в классической кристаллографии используется для описания направленных лучей, отраженных от периодической решетки [23]. При этом используются представления о модулях решеток слагаемыми в ряду Фурье с несравнимыми периодами. Однако такие модуляции не могут привести к точному строго упорядоченному расположению пятен, наблюдаемому в дифрактограммах.

На рис. 1 в качестве примера представлена электронная дифрактограмма соединения Al_6Mn [31]. Такой же вид имеют электронные дифрактограммы и многих других соединений: $Al_{70}Fe_{20}W_{10}$ [28], $Al_{22}Ni_{20}Co_8$ [18], $Ti_{54}Zr_{26}Ni_{20}$ [36]. Хорошо видно, что дифрактограммы имеют в центре яркое пятно, соответствующее месту падения пучка электронов на образец. При удалении от центра менее яркие пятна разной величины образуют сложный геометрический узор. Основными элементами этого узора являются прямые, исходящие из центра дифрактограммы, образуя ось вращения 10-го порядка, проходящую через центр перпендикулярно плоскости дифрактограммы. Структура узора на всех дифрактограммах одинаковая. В окрестности пятна в центре пятна меньшего размера образуют правильные пятиугольники, прилегающие друг к другу по целым сторонам. На внешние диагонали этих пятиугольников опираются пятиугольники большего размера, на внешние диагонали которых опираются пятиугольники еще большего размера и т. д. Важной особенностью этих структур является увеличение расстояния между пятнами при удалении от центра дифрактограмм вдоль линий, проходящих через центр, а также образование пятиугольников меньших размеров внутри пятиугольников больших размеров. Размеры пятен и расстояния между ними могут изменяться в зависимости от условий экспериментов, состава вещества и используемых приборов.

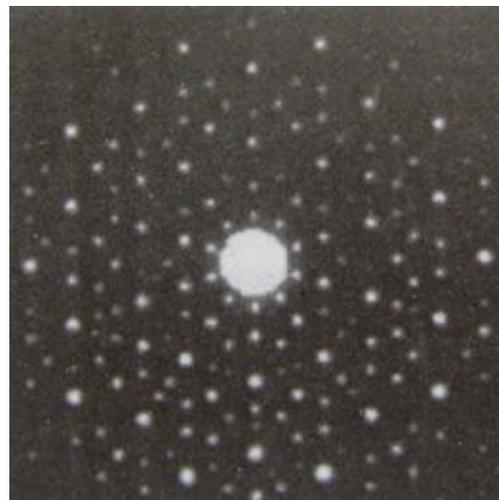


Рис. 1. Электронная дифрактограмма сплава Al_6Mn

Фрактальная природа несоизмеримых фаз

Система линий, на которых расположены пятна дифрактограмм (рис. 1), включает в себя 5 семейств параллельных линий [16], имеющих угол наклона $i \cdot 36^\circ$ (i – целое, $i = 0 \div 4$). В каждом семействе линии находятся на некотором расстоянии d друг от друга. Шаг d постоянен во всем множестве линий. Выберем произвольную точку O на одной из прямых семейства $i = 0$ (рис. 2). Через точку O проведем еще 4 прямых под углами $i \cdot 36^\circ$ ($i = 1 \div 4$). К каждой из этих 4 прямых проведем семейства параллельных линий, отстоящих друг от друга на расстоянии d . Теперь шаг $d = AB$ (рис. 2а) во всех семействах параллельных линий разделим на три участка по золотому сечению точками C и D так, что $AC = BD = d(2 - \tau)$, $CD = d(2\tau - 3)$, $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618033988$. Через точки C и D на каждом шаге последовательно всех семейств параллельных линий проведем прямые, параллельные линиям данного семейства. Очевидно, что линии, проходящие через точки C , на каждом шаге образуют множества параллельных прямых с шагом d . Аналогичное утверждение справедливо относительно линий, проходящих через точки D . Каждый из интервалов AC , BD и CD также делятся на три участка по золотому сечению, и через концевые точки участков проводятся прямые, параллельные линиям данного семейства. Этот процесс деления участков может быть продолжен. Однако расстояние между линиями при этом быстро уменьшается, и, соответственно, быстро уменьшается размер и интенсивность пятен дифрактограмм, расположенных на этих вновь построенных линиях.

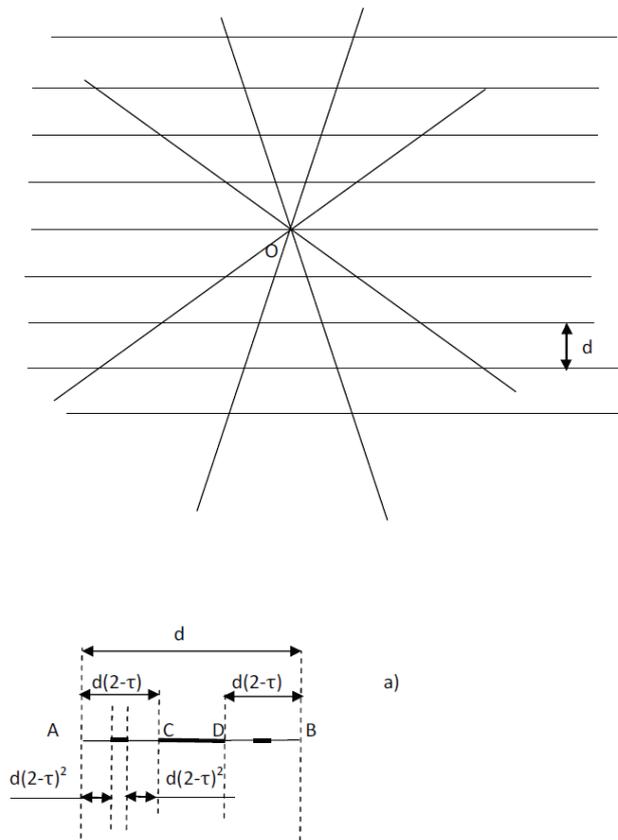


Рис. 2. К построению семейств параллельных линий геометрической модели дифрактограмм квазикристаллов

Результат взаимного расположения и пересечения всех семейств построенных параллельных линий представлен на рис. 3. Пересечение прямых этих семейств создают на плоскости систему правильных пятиугольников разных размеров, вершины которых полностью повторяют геометрию расположения пятен в электронных дифрактограммах. Таким образом, структура квазикристаллов, наблюдаемая в дифрактограммах, содержит систему 5 семейств (и подсемейств) параллельных линий, расположенных друг относительно друга (для пар соответственных прямых) на расстоянии d , то есть в этих структурах скрыта периодичность по 5 направлениям на плоскости.

Следует отметить, что расположение пятен на рис. 3 вдоль любой прямой, проходящей через центр рисунка, с точностью до множителя совпадает с расположением рефлексов, измеренных в работах [4, 22, 33] при облучении быстрыми электронами поверхностных слоев, соответственно, In на As, In на Ge, Pb на Si.

Геометрическую структуру на рис. 3 можно рассматривать как иерархическое заполнение плоскости двоянным правильным пятиугольником. Действительно, в центре каждой дифрактограммы отчетливо виден правильный десятиугольник, который представляет собой результат наложения (с поворотом) друг на друга двух правильных пятиугольников. Кстати, правильного десятиугольника нет в центре в модели дифрактограмм с ромбами Пенроуза, что существенно отличает эту модель от реальных дифрактограмм. При удалении от центра пятиугольники изменяют свои размеры по геометрической прогрессии с основанием $1 + \tau$, так что это есть иерархическое заполнение плоскости [6], в данном случае, двоянным пятиугольником. Причем такие заполнения можно наблюдать не только из центра дифрактограммы, но и из подобных точек, равномерно распределенных по дифрактограмме. Правильные пятиугольники образуют сектора, исходящие из центра дифрактограммы и подобных точек, состоящие из пятиугольников, опирающихся на диагонали друг друга, так что размер сторон пятиугольников увеличивается по геометрической прогрессии с основанием $1 + \tau / (1 + \tau)$.

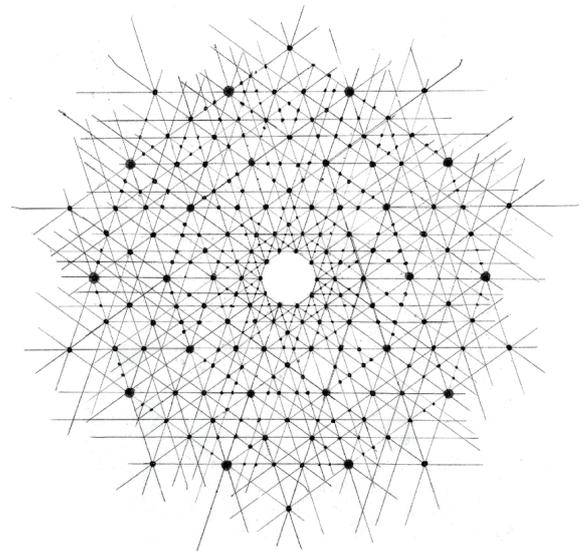


Рис. 3. Геометрическая модель дифрактограмм квазикристаллов

Так как последовательное деление отрезков линий по золотому сечению приводит к образованию правильных пятиугольников все меньших и меньших размеров, то можно показать, что возникающая при этом геометрическая структура есть двоянный фрактал. Для доказательства этого построим правильный пятиугольник достаточно большого размера (рис. 4). Его диагонали образуют соосный с ним правильный пятиугольник меньшего размера. Мысленно вырежем этот пятиугольник (или закрасим его черной краской). В исходном пятиугольнике можно видеть еще 5 пятиугольников того же размера, как у центрального, каждый из которых имеет одну общую вершину с исходным пятиугольником. Диагонали этих пятиугольников образуют в каждом пятиугольнике соосные с ними пятиугольники меньшего размера. Вырежем эти пятиугольники. В каждом из пятиугольников вокруг выделяемого пятиугольника расположены 5 пятиугольников еще меньшего размера, которые тоже в дальнейшем надо вырезать. Этот процесс можно неограниченно продолжать. Он аналогичен получению ковра Серпинского – фрактала, в котором геометрической фигурой является квадрат или треугольник [12, 25]. Можно рассчитать размерность фрактала из правильных пятиугольников. Заметим, что при каждом уменьшении размера пятиугольника его сторона уменьшается в $(2 - \tau)^{-1}$ число раз. Кроме того, при каждом уменьшении масштаба число пятиугольников увеличивается в 5 раз. Поэтому размерность D фрактала по Хаусдорфу [21] определяется по формуле

$$D = \frac{\log[f(\lambda x)/f(x)]}{\log \lambda}$$

где $\lambda = \frac{1}{(2 - \tau)^N}$ – масштабный множитель, N – любое целое число, $f(\lambda x)$ и $f(x)$ – число новых и число исходных элементов соответственно.

Так как в данном случае $f(\lambda x)/f(x) = 5$, то

$$D = \frac{\log \left[f\left(\frac{x}{(2 - \tau)^N}\right) / f(x) \right]}{\log(2 - \tau)^{-N}} = \frac{\log 5}{-\log(2 - \tau)} = 1,6722759.$$

Но в дифрактограмме, как уже отмечалось, в центре наблюдается двоянный правильный пятиугольник. Поэтому геометрия структуры на рис. 4 в дифрактограмме накладывается друг на друга с поворотом на 36° . Так как рассматриваемая система двоянного иррационального (в отличие от ковра Серпинского [12]) фрактала тождественна системе линий на дифрактограммах квазикристаллов, то квазикристаллы можно рассматривать как двоянный иррациональный («золотой») фрактал с размерностью $D = 1,6722759$ каждый.

Определим площадь исходного правильного пятиугольника, которая остается после последовательного вырезания правильных пятиугольников меньших размеров в «золотом» фрактале. Прежде всего найдем длины сторон правильных пятиугольников, вырезаемых из исходного правильного пятиугольника со стороной d . Так как длины сторон уменьшающихся пятиугольников задаются золотым сечением (см. рис. 2а), то находим, что после каждого шага уменьшения масштаба длина стороны пятиугольника равна $d(2 - \tau)^N$. Обозначим через S_0 площадь исходного пятиугольника и через S – оставшуюся

площадь исходного пятиугольника после удаления пятиугольников меньших размеров. Тогда

$$S = S_0 - \sum_{N=1}^{\infty} 5^N S_N,$$

где $S_N = \frac{[d(2 - \tau)^N]^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} = S_0(2 - \tau)^{2N}$ – площадь пятиугольника на N -м шаге уменьшения масштаба.

Вынося S_0 в правой части равенства за скобку, получим

$$S = S_0 \{1 - 5(2 - \tau)^2 [1 + 5(2 - \tau)^2 + 5^2(2 - \tau)^4 + \dots]\} = \frac{S_0}{1 + 5(2 - \tau)^2}.$$

Очевидно, что образование фрактала из правильных пятиугольников есть следствие многократного деления шага d между прямыми по золотому сечению. При этом на шаге d также образуется фрактал. Так как при описании деления шага d из каждого интервала образуются два интервала меньшего размера по краям интервала d , а центральная оставшаяся часть вырезается, то размерность этого фрактала по Хаусдорфу равна:

$$D = \frac{\log \left[f\left(\frac{x}{2 - \tau}\right) / f(x) \right]^N}{\log(2 - \tau)^{-N}} = \frac{\log 2}{-\log(2 - \tau)} = 0,72021.$$

Вырезаемая часть интервала, если принять, что $d=1$, равна

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2^{N-1} (2\tau - 3)^N = \frac{2\tau - 3}{7 - 4\tau} = 0,44721359.$$

Таким образом, оставшаяся часть интервала не много больше половины исходной длины. Данный фрактал нельзя назвать пылью Кантора [12], мощность которого равна нулю, скорее его можно назвать «золотой» пылью.

То, что профили рефлексов, построенные в работах [4, 22, 33] при исследовании поверхностей веществ после напыления на них других веществ, имеют, как отмечалось выше, расположение, подобное расположению пятен вдоль линий дифрактограмм квазикристаллов, указывает на фрактальную природу несовершенных фаз, полученных и в этих процессах.

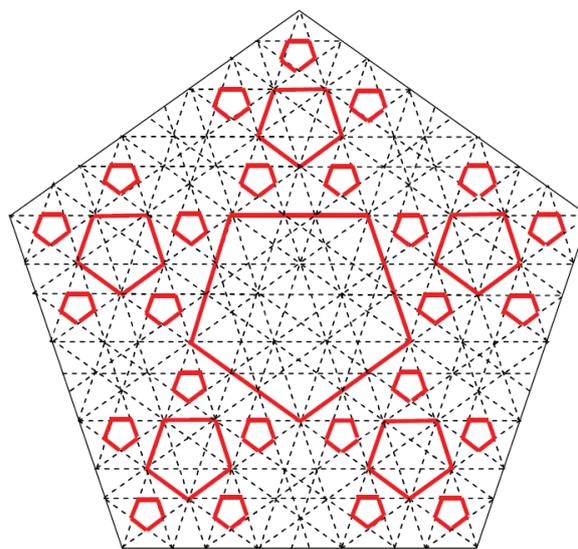


Рис. 4. Квазикристалл как фрактал

Пространственная структура квазикристаллов

Так как дифрактограмма есть результат взаимодействия пучка электронов с материальным протяженным телом, то видимые на дифрактограмме геометрические узоры следует рассматривать как проекции пространственных геометрических элементов на плоскость 2D. Но из трехмерного пространства получить такие проекции, используя выпуклые многогранники, нельзя. Другое дело, если считать протяженное тело телом высшей размерности, в частности, четырехмерным. Простейшей выпуклой правильной фигурой в пространстве 4D является правильный симплекс. В проекции на плоскость 2D он имеет вид правильного пятиугольника с пересекающимися диагоналями. Именно эти пятиугольники мы и видим в дифрактограммах на рис. 1 и 3. Таким образом, квазикристалл следует признать четырехмерным телом, в котором пространство иерархически заполнено правильными симплексами. Причем из каждого правильного симплекса в пространстве 4D, так же как и в его проекции на плоскость 2D, образуются 5 правильных симплексов меньшего размера. Поэтому правильные симплексы в пространстве 4D, так же как и их проекции на плоскость 2D, образуют двуденный фрактал с размерностью $D = 1,6733759$ каждый.

Вспомним, что геометрическая система дифрактограмм построена с помощью семейств параллельных линий, периодически расположенных на плоскости 2D по 5 направлениям. Возникает вопрос: к чему приводит эта скрытая периодичность семейств параллельных линий в пространстве 4D? Для ответа на этот вопрос вновь обратимся к анализу структуры дифрактограмм.

Выберем ромб с углами $\gamma = 72^\circ$ и $\delta = 108^\circ$. Очевидно, что этим ромбом можно покрыть плоскость без щелей и зазоров с помощью трансляции по двум на-

правлениям x и y , которые параллельны ребрам ромба. При этом вершины ромба образуют решетку узлов с целочисленными значениями x и y , если длину ребра принять за единицу. Через каждый узел решетки перпендикулярно плоскости проходит ось второго порядка, поворот относительно которой на 180° совмещает решетку саму с собой. Естественно, что каждая точка внутри ромба или на его границе (стороне) также образует решетку при трансляции ромба по направлениям x и y , так как значения переменных x и y в узлах этой решетки отличаются друг от друга на целое число, хотя сами значения переменных x и y в узлах решетки не обязательно есть целые числа. Если координаты выбранной точки внутри ребра в основном положении есть $x = \alpha$, $y = \beta$, ($0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$), то координаты узлов новой решетки будут $\alpha \pm n$, $\beta \pm n$ соответственно. Выберем внутри ромба несколько точек специальным образом. На каждой стороне ребра дополнительно к вершинам A_1, A_2, A_3, A_4 выберем по две точки, каждая из которых делит стороны по золотому сечению (рис. 5), то есть

$$\begin{aligned} a_1(x = 2 - \tau, y = 0); a_2(x = \tau - 1, y = 0); \\ a_3(x = 2 - \tau, y = 1); a_4(x = \tau - 1, y = 1); \\ b_1(x = 0, y = 2 - \tau); b_2(x = 0, y = 2 - \tau); \\ b_3(x = 1, y = 2 - \tau); b_4(x = 1, y = 2 - \tau), \end{aligned}$$

где $\tau = 1,6180\dots$

Соединим точку A_1 с точками a_4, b_4 , а точку A_3 с точками a_1, b_1 . Очевидно (в силу симметрии), что точки пересечения линий A_1a_4 и b_1A_3 , и линий A_3a_1 и A_1b_4 лежат на диагонали ромба A_2A_4 . Линия b_1A_3 задается уравнением $y = x(\tau - 1) + 2 - \tau$, а уравнение линии A_1a_4 имеет вид $y = \frac{x}{\tau - 1}$. Точка пересечения этих линий дает координаты точки a_5 : $x_{a_5} = 2 - \tau$, $y_{a_5} = \tau - 1$. Таким образом, точка a_5 лежит на прямой a_3a_1 и на прямой b_2b_4 . Аналогично находим координаты точки a_6 , лежащей на пересечении прямых a_1A_1 и A_1b_4 , $x_{a_6} = \tau - 1$, $y_{a_6} = 2 - \tau$. Следовательно, точка a_6 лежит на пересечении прямых a_4a_2, b_1b_3 .

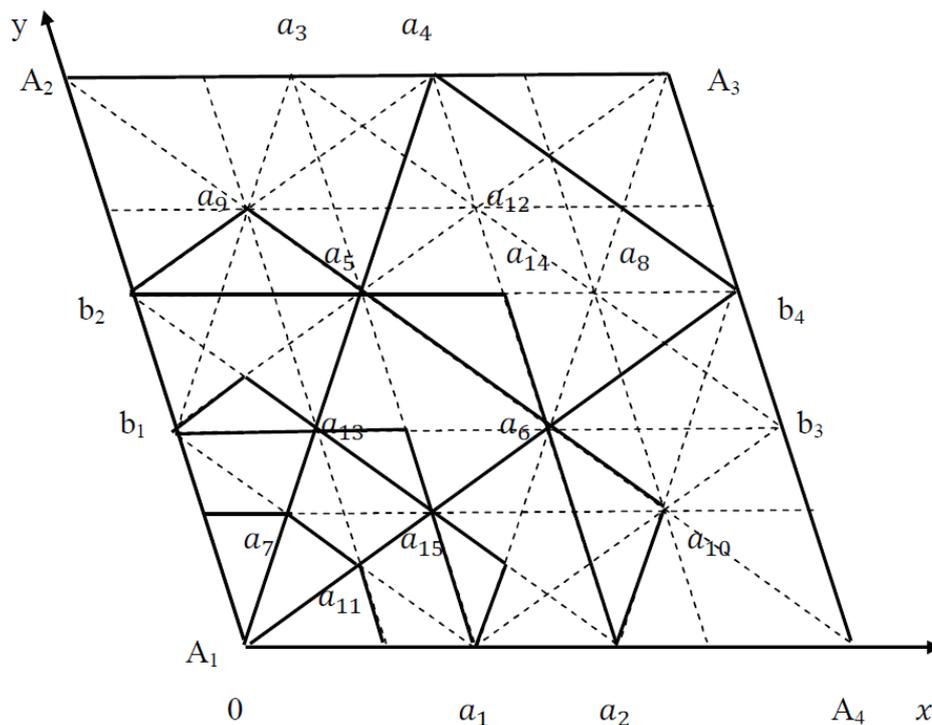


Рис. 5. Ромб трансляции сети параллельных линий дифрактограмм

Проведем на рис. 5 линии $a_3a_1, a_4a_2, b_2b_4, b_1b_3$. Пересечение линии b_1b_3 с линией A_1a_4 дает точку a_7 с координатами $x_{a_7} = (\tau - 1)(2 - \tau), y_{a_7} = 2 - \tau$. Пересечение линии b_2b_4 с линией A_3a_1 , задаваемой уравнением $\frac{x-1}{y-1} = \frac{x-2+\tau}{y}$, дает точку a_8 с координатами $x_{a_8} = 2(2 - \tau), y_{a_8} = \tau - 1$. Проведем параллельные линии a_3b_1, b_4a_2 . Пересечение этих линий с диагональю A_1A_4 дает точки a_9, a_{10} . Уравнение линии $a_3b_1: \frac{x-2+\tau}{y-1} = \frac{x}{y-2+\tau}$. Уравнение линии $b_4a_2: \frac{x-1}{y-\tau+1} = \frac{x-1}{y}$. Уравнение диагонали $A_2A_4: \frac{x}{y-1} = \frac{x-1}{y}$.

Точка пересечения диагонали с линией a_3b_1 находится из системы $\frac{x}{y-1} = \frac{x-1}{y}, \frac{x-2+\tau}{y-\tau} = \frac{x}{y-2+\tau}$, то есть получаем координаты точки $a_9, x_{a_9} = (\tau - 1)(2 - \tau), y_{a_9} = 2(2 - \tau)$.

Точка пересечения диагонали с линией b_4a_2 находится из системы $\frac{x}{y-1} = \frac{x-1}{y}, \frac{x-1}{y-\tau+1} = \frac{x-\tau+1}{y}$, то есть получаем координаты точки $a_{10}, x_{a_{10}} = 2(2 - \tau) = x_{a_8}, y_{a_{10}} = 2\tau - 3$.

Линии a_3a_1, b_1b_3 , пересекаясь, дают точку a_{13} с координатами $x_{13} = y_{a_{13}} = 2 - \tau$. Линии a_2a_3, b_2b_4 , пересекаясь, дают точку a_{14} с координатами $x_{14} = y_{a_{14}} = \tau - 1$.

Легко видеть, что точки b_1, a_5, a_6, a_1, A_1 и b_4, a_5, a_6, a_4, A_3 образуют два имеющих один размер правильных пятиугольника со стороной $2 - \tau$. Кроме того, на рис. 5 можно увидеть ряд правильных пятиугольников со сторонами $2\tau - 3$ и ряд правильных пятиугольников со сторонами $5 - 3\tau$.

Существенно, что в окрестности вершин A_1 и A_3 исходного ромба образуются по три расширяющихся сектора, состоящие из правильных пятиугольников, увеличивающих свой размер так, что каждый последующий пятиугольник построен на диагонали предыдущего пятиугольника, то есть имеет длину ребра, равную диагонали предыдущего пятиуголь-

ника. Соединяя точки a_4 с b_4 и a_1 с b_1 , можно видеть, что сектора и в окрестности вершины A_1 , и в окрестности вершины A_3 совмещаются друг с другом при вращении на 36° . Такие же два сектора образуются как в окрестности вершины A_2 , так и в окрестности вершины A_4 . Они совмещаются друг с другом при вращении на 36° вокруг соответствующей вершины. Существенно, что описываемые сектора, исходящие из каждой вершины, существуют в ромбе одновременно. Если теперь транслировать ромб $A_1A_2A_3A_4$ по направлениям x и y единичным шагом, то на плоскости вершины ромба образуют решетку. Проведем трансляцию ромба из основного положения на один шаг влево, на один шаг вниз и одновременно на один шаг вниз и влево. При трансляции влево выделим сектора, исходящие из вершины A_4 ромба в основном положении; при трансляции вниз выделим сектора, исходящие из вершины A_2 ромба в основном положении; при трансляции вниз и влево выделим сектора, исходящие из вершины A_3 ромба в основном положении. Результат этих трансляций представлен на рис. 6.

Отчетливо видно, что точка O на рис. 6 имеет ось вращения 5-го и 10-го порядков. При увеличении количества трансляций по осям координат для сохранения осей вращения 5-го и 10-го порядков необходимо из линий основного ромба выделять те линии, которые не нарушают этот порядок. При таком построении достаточно использовать систему пяти семейств параллельных линий ромба в исходном состоянии:

- 1-е семейство: $A_2A_1, a_3a_1, a_4a_2, A_3A_4, a_9a_{13}, a_8a_{10}$;
- 2-е семейство: $A_4A_1, b_3b_1, b_4b_2, A_3A_3, a_9a_{12}, a_7a_{10}$;
- 3-е семейство: $A_3b_1, b_3a_1, a_4b_2, A_1b_4, a_{14}a_{13}, a_8a_{10}$;
- 4-е семейство: $a_4A_1, a_3b_1, b_4a_2, A_3a_1, a_{11}a_{12}, a_{15}a_{14}$;
- 5-е семейство: $A_4A_2, a_1b_1, b_2a_2, b_3a_3, a_4b_4$.

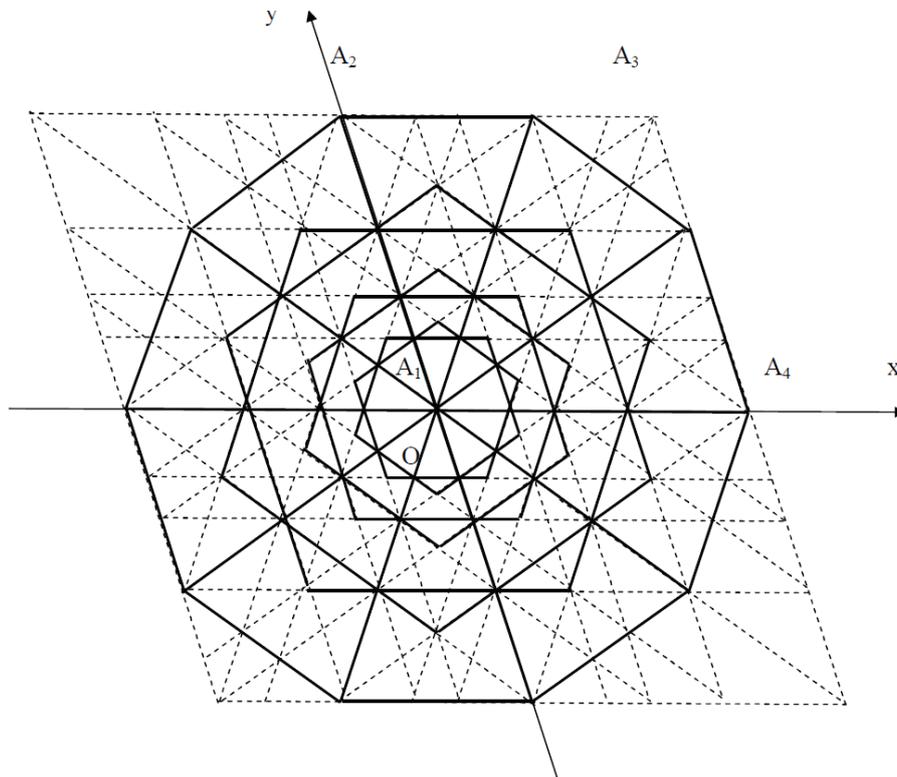


Рис. 6. Построение геометрической модели дифрактограмм квазикристаллов с помощью ромба трансляции

Эти семейства представляют 5 семейств параллельных линий, указанных ранее.

Сравнивая рис. 6 с дифрактограммами на рис. 1, видим, что рис. 6 полностью описывает основные элементы дифрактограмм. Более детальное расположение точек дифрактограмм внутри обозначенных на рис. 6 правильных пятиугольников можно получить, используя указанные ранее подсемейства параллельных линий. Следует подчеркнуть, что сетка семейств параллельных линий в четырех позициях ромба на рис. 6 при условии проведения линий подсемейств обладает свойством трансляции (по построению). Точную трансляцию нарушает расположение некоторых пятен дифрактограмм по точкам пересечения совокупности линий так, что такое расположение придает точке O симметрию вращения 10-го порядка. Можно заметить, что некоторые точки пересечения жирных линий на рис. 6 для обеспечения осевой симметрии центра дифрактограммы виртуально перемещаются при переходе в разные квадранты плоскости (x, y) . Удаляя точки виртуального перемещения для обеспечения осевой симметрии, можно получить трансляционную структуру с равномерным расположением на плоскости локальных осей 10-го порядка (рис. 7).

Эта процедура выделяет из дифрактограммы периодическую часть из несоизмеримой структуры квазикристалла. При исследовании структуры на рис. 7 можно обнаружить, что она является проекцией периодического заполнения пространства 4D политопом, изображенным на рис. 8 (вершины одного из этих политопов на рис. 7 обведены окружностями).

Политоп на рис. 8 состоит из 8 трехмерных многогранников, грани которых определяются по построению золотым сечением. А именно, все двумерные грани трехмерных граней политопа представляют собой одинаковые ромбы с углами

$$\varphi = \arccos \frac{1}{2\tau}, \gamma = \pi - \varphi.$$

Трехмерные грани (ромбоэдры) прилегают друг к другу по плоским граням, так что все плоские грани являются общими для каких-либо двух ромбоэдров, что необходимо для существования политопа. Кроме того, множество трехмерных многогранников дополнительно (например, в отличие от гиперкуба) разбивается на пары ромбоэдров, прилегающих друг к дру-

гу по двум полосам $pauiw$ и $woab$, ширина которых составляет $2 - \tau$ от длины ребра. Таким образом, политопа на рис. 8 можно назвать золотым ромбоэдром и считать, что периодическая часть структуры квазикристаллов представляет собой трансляционное заполнение пространства 4D золотым ромбоэдром.

Фазовые переходы второго рода с флуктуацией геометрической структуры

Л.Д. Ландау впервые [14] связал фазовый переход второго рода с нарушением симметрии структуры тела в точке фазового перехода, то есть с уменьшением порядка группы симметрии структуры. Им введен в рассмотрение параметр порядка, характеризующий фазовый переход. В дальнейшем было установлено, что параметр порядка может иметь несколько составляющих, то есть представляет собой вектор. Размерность этого вектора совпадает с размерностью неприводимых представлений группы симметрии высокосимметричной фазы. Весьма продуктивной в исследовании критических явлений стала идея Л. Каданова [24], позже подтвержденная экспериментально, об объединении в процессе фазового перехода элементарных ячеек высокосимметричной фазы в более крупные блоки, выступающие в новой фазе как новые элементарные ячейки. Эта идея (идея скейлинга) позволила К.Г. Вильсону [34, 35] и М. Фишеру [19] ввести в рассмотрение для описания непрерывного фазового перехода систему дифференциальных уравнений, так называемых уравнений ренормгруппы (группы перенормировки). Факт изменения размера элементарной ячейки в процессе фазового перехода стал основой принципа подобия в фазовых переходах. Этот принцип выражается в степенном законе изменения термодинамических величин в процессе фазовых переходов [15]. Показатели степеней получили название критических индексов. Установлено, что уравнения ренормгруппы существенно зависят от размерности пространства, в котором рассматривается гамильтониан системы. Причем размерность пространства d , равная 4, как оказалось, имеет особое значение, так как критические индексы, следующие из теории Л.Д. Ландау, совпадают с индексами, следующими из уравнений ренормгруппы, при $d = 4$, и не совпадают при размерности пространства, равном 3. В связи с этим К.Г. Вильсон пред-

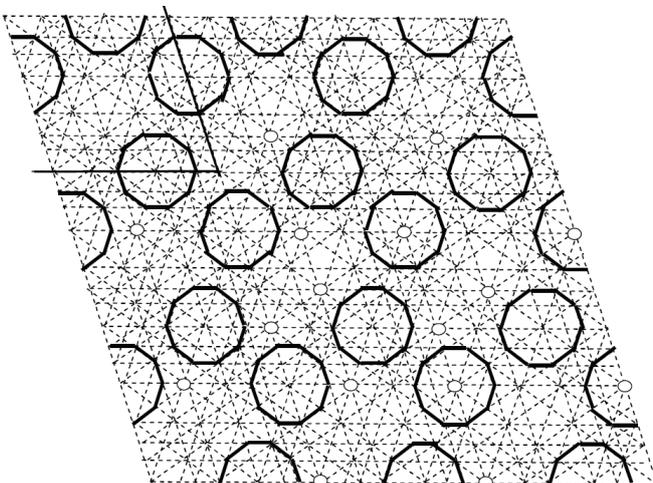


Рис. 7. Трансляционная основа несоизмеримой структуры

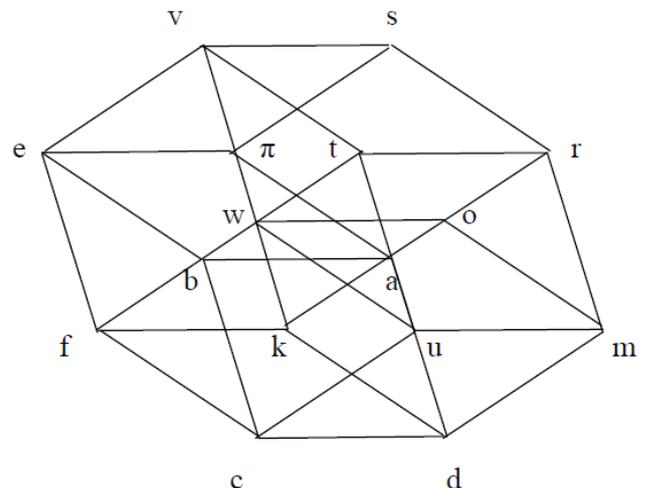


Рис. 8. Золотой гиперромбоэдр

ложил исследовать уравнения ренормгруппы вблизи выделенного значения $d = 4$, считая параметр $\epsilon = d - 4$ малым. Далее можно разложить гамильтониан в ряд по степеням ϵ , а затем в полученных результатах вернуться к привычной размерности 3, положив $\epsilon = 1$. При этом важен вопрос о том, в каких неподвижных точках заканчивается процесс фазового перехода. Однако закономерности достижения неподвижных точек системы уравнений ренормгруппы фазовых переходов, особенно при большой размерности параметра порядка, исследованы пока недостаточно и теоретически, и, тем более, экспериментально. Энергия системы высокосимметричной фазы в окрестности точки фазового перехода записывается, согласно теории Л.Д. Ландау, в виде разложения гамильтониана в ряд по степеням параметра порядка, в который надо добавить слагаемые с пространственными производными, учитывающими в общем случае возможную неоднородность распределения параметра порядка по пространству, а также слагаемые, связанные с многокомпонентностью параметра порядка. Это уравнение энергии называется гамильтонианом Гинзбурга–Ландау. Каждое слагаемое в этом ряду имеет коэффициент u_i , представляющий собой функцию температуры и, в общем случае, давления. Функции u_i в конечном итоге и будут представлять фазовые координаты пространства системы дифференциальных уравнений ренормгруппы фазовых переходов. По идее Каданова–Вильсона, для описания процесса укрупнения блоков необходимо осуществить переход от исходного гамильтониана H к последующим гамильтонианам $H', H'', H''' \dots$ (и, соответственно, к рекурсивным переменным $u_i', u_i'', u_i''' \dots$). Неподвижная точка этого процесса будет отвечать необходимому условию инвариантности гамильтониана, что соответствует, если считать оператор перехода инфинитизимальным, положению равновесия системы дифференциальных уравнений. В окрестности неподвижной точки, по методу Вильсона–Фишера, применяют разложение гамильтониана в ряд по степеням параметра ϵ , ограничиваясь небольшим числом членов ряда ввиду допущения о его малости. В результате получается система дифференциальных уравнений относительно рекурсивных переменных, у которых можно уже опустить верхние индексы.

В ряде веществ могут происходить фазовые переходы с шестимерным параметром порядка [15, 26, 27]. К ним относятся, например, фазовые переходы в $TbAu_2, DyC_2, Nd, TbO_2, K_2IrCl_6$. В K_2IrCl_6 (пространственная группа $Fm\bar{3}m$) происходят магнитные фазовые переходы с образованием антиферромагнитной структуры типа 111 [26]. Гамильтониан Гинзбурга–Ландау с шестимерным параметром порядка имеет вид [26, 27]:

$$H = \int dV \left\{ \frac{1}{2} [u_4 \sum_{i=1}^6 \varphi_i^2 + \sum_{i=1}^6 (\nabla \varphi_i)^2] - u_1 \sum_{i=1}^6 \varphi_i^4 + u_2 (\varphi_1^2 \varphi_4^2 + \varphi_2^2 \varphi_5^2 + \varphi_3^2 \varphi_6^2) + u_3 (\varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_1^2 \varphi_5^2 + \varphi_2^2 \varphi_4^2 + \varphi_5^2 \varphi_4^2 + \varphi_1^2 \varphi_3^2 + \varphi_4^2 \varphi_6^2 + \varphi_1^2 \varphi_6^2 + \varphi_4^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_2^2 + \varphi_5^2 \varphi_6^2 + \varphi_2^2 \varphi_6^2 + \varphi_3^2 \varphi_5^2) \right\}. \quad (1)$$

При использовании техники разложения Вильсона получена система уравнений относительно рекурсивных переменных u_i' [27], причем три из этих уравнений можно записать, если ограничиваться слагаемыми первого порядка по ϵ , в виде замкнутой

автономной системы дифференциальных уравнений (в [27] положения равновесия системы рассматривались также в линейном приближении по ϵ):

$$\frac{dv_1}{dt} = v_1 - 36v_1^2 - v_2^2 - 4v_3^2, \quad (2)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = v_2 - 8v_2^2 - 24v_1v_2 - 8v_3^2, \quad (3)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = v_3 - 24v_1v_3 - 4v_2v_3 - 12v_3^2. \quad (4)$$

Система уравнений (2)–(4) исследуется качественно при использовании методов качественного исследования дифференциальных уравнений в многомерных фазовых пространствах в целом [5]. В соответствие с системой (2)–(4) в фазовом пространстве (v_1, v_2, v_3) существуют четыре нулевых поверхности, в точках которых производные $\frac{dv_i}{dt}$ обращаются в нуль:

поверхность $F_1: v_1^2 - \frac{1}{36}v_1 + \frac{1}{36}v_2^2 + \frac{1}{9}v_3^2 = 0$,
в ее точках $\frac{dv_1}{dt} = 0$; (5)

поверхность $F_2: v_1 = \frac{v_2 - 8v_2^2 - 8v_3^2}{24v_2}$,
в ее точках $\frac{dv_2}{dt} = 0$; (6)

поверхность $F_3: v_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{2}v_3 - \frac{1}{6}v_2$,
в ее точках $\frac{dv_3}{dt} = 0$; (7)

поверхность $F_4: v_3 = 0$, в ее точках $\frac{dv_3}{dt} = 0$.

Точки пересечения нулевых поверхностей, в которых одновременно $\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_3}{dt} = 0$, суть положения равновесия системы (5)–(7), то есть ее неподвижные точки. Нулевая поверхность F_4 совпадает с координатной плоскостью $v_3 = 0$. На ней расположены положения равновесия 1) $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$; 2) $v_1 = \frac{1}{40}, v_2 = \frac{1}{20}, v_3 = 0$; 3) $v_1 = \frac{1}{36}, v_2 = 0, v_3 = 0$; 4) $v_1 = \frac{1}{72}, v_2 = \frac{1}{12}, v_3 = 0$.

Кроме того, в отличие от системы с четырехмерным параметром порядка, в данном случае в открытой части фазового пространства имеются еще четыре положения равновесия, принадлежащие одновременно поверхностям F_1, F_2, F_3 . Кратко опишем последовательность нахождения координат положений равновесия. Из (6) исключим v_3^2 с помощью (5) и получим квадратное уравнение относительно v_2 , разрешая которое находим связь переменных v_2 и v_1 в положениях равновесия $(v_2)_{1,2} = \frac{1 - 24v_1 \pm (1 - 48v_1)^{1/2}}{12}$, то есть

$$(v_2)_1 = \frac{1}{6} - 6v_1, \quad (8)$$

$$(v_2)_2 = 2v_1. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$(v_3)_1 = \frac{1}{36}. \quad (10)$$

Подставляя (8), (10) в (5), получим квадратное уравнение для $(v_1)_1$, разрешая которое находим $(v_1)_{1(1,2)} = \frac{3 \pm 1/3}{144}$, то есть $(v_1)_{1(1)} = \frac{5}{216}, (v_1)_{1(2)} = \frac{1}{54}$.

С учетом (8) имеем $(v_2)_{1(1)} = \frac{1}{36}, (v_2)_{1(2)} = \frac{1}{18}$. Таким образом, имеем координаты двух точек

$$(v_1)_{1(1)} = \frac{5}{216}; (v_2)_{1(1)} = \frac{1}{36}; (v_3)_{1(1)} = \frac{1}{36}; \quad (11)$$

$$(v_1)_{1(2)} = \frac{1}{54}; (v_2)_{1(2)} = \frac{1}{18}; (v_3)_{1(2)} = \frac{1}{36}. \quad (12)$$

Подставляя (9) в (7), находим

$$(v_3)_2 = \frac{1}{12} - \frac{8}{3}v_1. \quad (13)$$

Подставляя (9), (13) в (5), получим квадратное уравнение для $(v_1)_2$, разрешая которое, находим

$$(v_1)_{2(1,2)} = \frac{25 \pm 3}{1232}, \text{ то есть } (v_1)_{2(1)} = \frac{1}{44}, (v_1)_{2(2)} = \frac{1}{56}.$$

С учетом (9) имеем $(v_2)_{2(1)} = \frac{1}{22}, (v_2)_{2(2)} = \frac{1}{28}$.

Таким образом, с учетом (13) получим координаты еще двух точек:

$$(v_1)_{2(1)} = \frac{1}{44}; (v_2)_{2(1)} = \frac{1}{22}; (v_3)_{2(1)} = \frac{1}{44}; \quad (14)$$

$$(v_1)_{2(2)} = \frac{1}{56}; (v_2)_{2(2)} = \frac{1}{28}; (v_3)_{2(2)} = \frac{1}{28}. \quad (15)$$

Обозначим точку, задаваемую равенствами (11), точкой 5); точку, задаваемую равенствами (14), точкой 6); точку, задаваемую равенствами (15), точкой 7); точку, задаваемую равенствами (12), точкой 8). Линеаризацией системы уравнений (2)–(4) в окрестности каждой из 8 неподвижных точек можно найти собственные числа положений равновесия. Раскладывая в ряд Тейлора правые части уравнений (2)–(4) по трем фазовым переменным в окрестности положений равновесия, ограничиваясь линейными отклонениями от положений равновесия, из дискриминанта полученной системы для точек 1)–4) находим собственные числа положений равновесия.

В точке 1) собственные числа равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

в точке 2) $\lambda_1 = \frac{1}{5}, \lambda_2 = -\frac{1}{5}, \lambda_3 = -\frac{2}{5}$;

в точке 3) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

в точке 4) $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{97}-1}{12}, \lambda_3 = -\frac{\sqrt{97}+1}{12}$.

Таким образом, положения равновесия 1)–4) в трехмерном фазовом пространстве неустойчивы, так как в каждой из них имеются положительные собственные числа. Точка 1) есть неустойчивый узел, точка 2) представляет собой седло-узел, точка 3) – вырожденный неустойчивый узел, точка 4) – седло-узел. Таким образом, положения равновесия 1)–4) в трехмерном фазовом пространстве неустойчивы, так как в каждой из них имеются положительные собственные числа. В точках 5)–8) дискриминанты систем в

окрестности особых точек приводят к полиномам третьего порядка, которые решались численно.

Для точки 5) полином третьего порядка имеет вид $\lambda^3 + 0,166666\lambda^2 - 0,2407499\lambda + 0,0233196 = 0$; его решения: $\lambda_1 = 0,1; \lambda_2 = 0,261; \lambda_3 = -0,6$.

Для точки 6) полином третьего порядка имеет вид $\lambda^3 + 0,289256\lambda^2 - 0,02854996 = 0$; его решения: $\lambda_1 = 0,09; \lambda_{2,3} = -0,0493506 \pm i 0,54457566$.

Для точки 7) полином третьего порядка имеет вид $\lambda^3 + 0,78571428\lambda^2 - 0,540816326\lambda + 0,12536443 = 0$; его решения: $\lambda_{1,2} = 0,2471428 \pm i 0,175470216; \lambda_3 = -1,28$.

Для точки 8) полином третьего порядка имеет вид $\lambda^3 + 0,4074074\lambda^2 - 0,50617284\lambda - 49 = 0$; его решения: $\lambda_1 = 3,3; \lambda_{2,3} = -1,8537037 \pm i 2,87959$.

Таким образом, все неподвижные точки 5)–8) также неустойчивы, так как для каждой из этих точек среди собственных чисел есть положительные собственные числа, или они имеют положительные действительные части. Положение равновесия точки 5) относится к типу неустойчивое седло; положение равновесия точки 6) – к типу седло-фокус; положение равновесия точки 7) – к типу неустойчивое седло-фокус; положение равновесия 8) – к типу седло-фокус. Следовательно, все положения равновесия системы (2)–(4) неустойчивы. В этом состоит принципиальное отличие от выводов работы [27], в которой в результате неправильного определения собственных чисел утверждалось существование устойчивых положений равновесия системы среди положений равновесия системы (2)–(4). Для определения характера поведения решений системы (2)–(4) не только в окрестности положений равновесия в линейном приближении, но и в фазовом пространстве в целом, построим нулевые поверхности системы (2)–(4) и исследуем их линии пересечения (рис. 9).

Внутри областей, ограниченных нулевыми поверхностями, соответствующие фазовые координаты увеличиваются, вне областей – уменьшаются. Общие точки всех четырех нулевых поверхностей суть положения равновесия системы (неподвижные точки 1)–8)). При использовании данных по анализу положений равновесия (их координат и собственных чисел), взаимному расположению нулевых поверхностей, образующих в фазовом пространстве области с постоянными знаками производных от фазовых координат, можно представить всю совокупность траекторий фазового пространства (рис. 10).

Следует заметить, что нулевая поверхность F_4 является одновременно и интегральной плоскостью системы. Из фазовой диаграммы на рис. 10 видно, что отсутствие в системе устойчивых положений равновесия приводит, при условии заложенного в системе уравнений ренормгруппы уменьшения значений всех фазовых координат при достаточном удалении от начала координат вне нулевых поверхностей, к хаотическим переходам между положениями равновесия 2), 4), 8), сопровождающихся колебаниями фазовых координат. Так как каждое положение равновесия соответствует определенной форме гамильтониана и, следовательно, геометрической структуре с определенной симметрией, можно говорить о том, что при большой размерности параметра порядка фазовый переход сопровождается флуктуацией геометрической структуры.

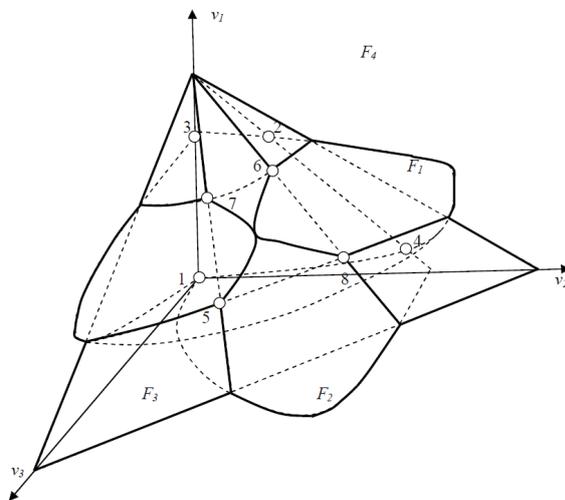


Рис. 9. Пересечение нулевых поверхностей системы уравнений ренормгруппы с параметром порядка размерности 6

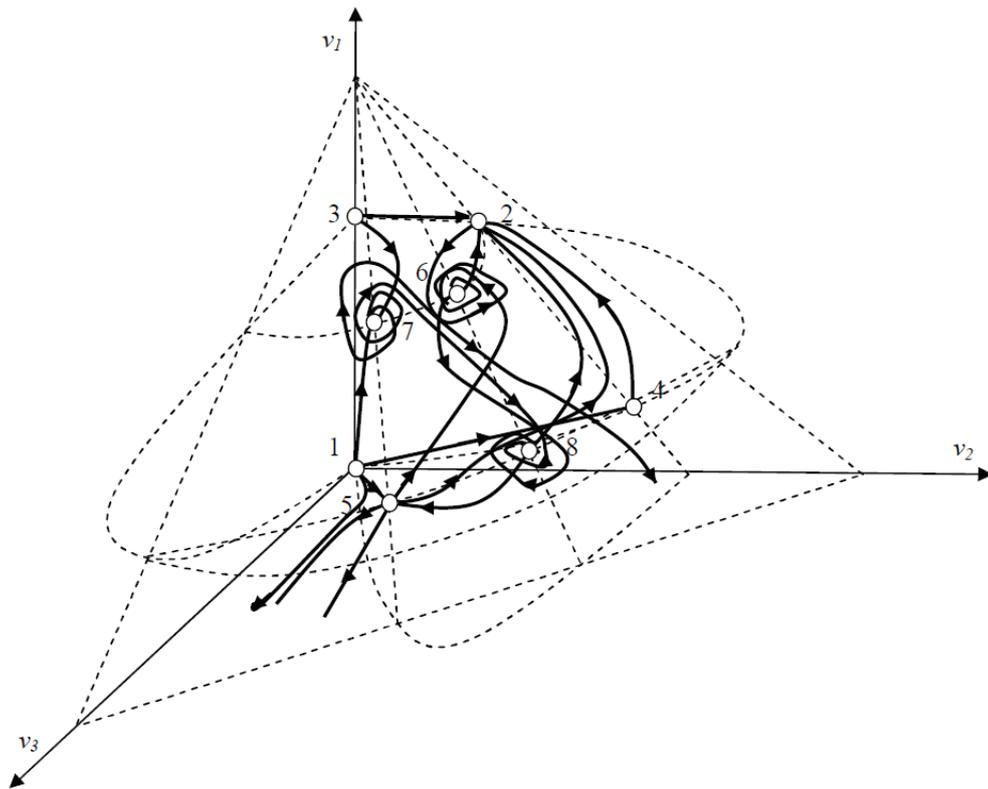


Рис. 10. Фазовая диаграмма уравнений ренормгруппы с параметром порядка размерности 6

Заключение

На основании взглядов В.И. Вернадского и П. Кюри можно утверждать, что для природных тел пространства земной реальности характерно отклонение от возможной предельной симметрии, достижимой мысленно при идеализации обстоятельств человеком. В процессе эволюции природных тел – как живых, так и косных – происходят и накапливаются нарушения симметрии. Виды нарушений симметрии разнообразны. Разумно предположить зависимость их от внешних и внутренних воздействий на природное тело. В данной работе рассмотрены два принципиальных вида возможных нарушений симметрии: образование несоразмерных структур, лишенных трансляционной симметрии, и возникновение режимов фазовых переходов с флуктуацией структуры фаз.

На основе анализа экспериментальных электронных дифрактограмм квазикристаллов как типичных представителей несоразмерных структур установлено, что, во-первых, несоразмерные структуры имеют фрактальную природу. Определены типы соответствующих фракталов и их размерность. Во-вторых, показано, что несоразмерные структуры имеют скры-

тую периодичность. Определена фундаментальная область этой скрытой периодичности в пространстве 4D. Она имеет вид специального политопа, названного золотым гиперромбоэдром (рис. 8), так как он состоит из ромбоэдров, грани которого определяются золотым сечением. В целом, несоразмерную структуру можно рассматривать как иерархическое заполнение пространства 4D правильным симплексом.

С помощью качественного исследования известных уравнений ренормгруппы в многомерных фазовых пространствах, описывающих фазовые переходы с изменением структуры, установлено, что фазовые переходы у ряда веществ (с высокими параметрами порядка [15], [26]) не могут закончиться образованием какой-то определенной структуры, так как все имеющиеся в этом процессе положения равновесия неустойчивы (неустойчивы все возможные структуры). Фазовый переход в таких режимах сопровождается непрерывными случайными переходами между набором некоторых определенных структур. Возникает режим фазового перехода с флуктуацией структуры. Подобные режимы наблюдаются в геологии [11] и биологии (флуктуирующая асимметрия [10]).

Литература

1. Белоусов Л.В. Симметричные преобразования в развитии организмов. Морфогенез в индивидуальном и историческом развитии: симметрия и асимметрия // Гео-биологические системы в прошлом. – М. : Палеонтологический ин-т РАН, 2013. – С. 6–21.
2. Вернадский В.И. Химическое строение Земли и ее окружения. – М. : Наука, 1965. – 375 с.
3. Войтеховский Ю.Л. Пространство кристаллической горной породы: к 150-летию со дня рождения В.И. Вернадского // Труды IX Все-

- российской научной школы «Математические исследования в естественных науках». – Апатиты : Геологический ин-т КНЦ РАН, 2013. – С. 17–23.
4. Галицин Ю.Г., Мансуров В.Г., Мараховка И.И., Петренко И.П. Соразмерные и несооразмерные фазы In на поверхности (111) A In As // Физика и техника полупроводников. – 1998. – Т. 32, № 1. – С. 89–94.
 5. Жижин Г.В. Качественное исследование одномерных стационарных течений. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. 01.053. – Л. : Ленинградский политехнический ин-т им. М.И. Калинина, 1972. – 72 с.
 6. Жижин Г.В. Геометрические основы диссипативных структур. – СПб. : Политехника, 2010. – 171 с.
 7. Жижин Г.В. Фрактальная природа несооразмерных фаз // Труды X Всероссийской научной школы «Математические исследования в естественных науках» (в рамках XI Ферсмановской научной сессии РАН). – Апатиты : Геологический ин-т КНЦ РАН, 2014. – С. 9–14.
 8. Жижин Г.В. Фазовые переходы второго рода с флуктуацией геометрической структуры // Труды X Всероссийской научной школы «Математические исследования в естественных науках» (в рамках XI Ферсмановской научной сессии РАН). – Апатиты : Геологический ин-т КНЦ РАН, 2014. – С. 15–21.
 9. Захаров В.М. Асимметрия животных: популяционно-феногенетический подход. – М. : Наука, 1987. – 216 с.
 10. Исаева В.В. Преобразование симметрии в онтогенезе и эволюции. Морфогенез в индивидуальном и историческом развитии: симметрия и асимметрия // Гео-биологические системы в прошлом. – М. : Палеонтологический ин-т РАН, 2013. – С. 22–43.
 11. Козлов Н.Е., Мартынов Е.В., Сорохтин Н.О., Марчук Т.С. Эволюция вещественного состава метабазитов раннего докембрия Кольского региона // Труды XI Ферсмановской научной сессии РАН. – Апатиты : Геологический ин-т КНЦ РАН, 2014. – С. 60–65.
 12. Кроновер К. Фракталы и хаос в динамических системах. – М. : Техносфера, 2006. – 484 с.
 13. Кюри П. О симметрии и физических явлениях: симметрия электрических и магнитных полей // Классики науки. П. Кюри. Избранные труды. – М. ; Л. : Наука, 1966. – С. 95–113.
 14. Ландау Л.Д. К теории фазовых переходов // Собрание трудов. Т. 1 / Ред. Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1969. – С. 234–261.
 15. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Метод ренормгруппы в теории фазовых переходов // УФН. – 1977. – Т. 121. – С. 55–96.
 16. Шевченко В.Я., Жижин Г.В., Маккей А.Л. О структуре квазикристаллов в пространстве высшей размерности // Известия РАН. Сер. хим. – 2013. – № 2. – С. 269–274.
 17. Bohr H. Collected Mathematical Work. II Almost periodic functions. – Copenhagen: Dansk Matematisk Forening, 1952. – 150 p.
 18. Abe E., Yan Y., Pennycook S. J. Quasicrystals as cluster aggregates // Nature Materials. – 2004. – Vol. 3. – P. 759–767.
 19. Fisher M.E., Pfeuty P. Critical behavior of the anisotropic n-vector model // Phys. Rev. B. – 1972. – Vol. 6. – P. 1889–1891.
 20. Gratias D., Cahn J.W. Periodic and quasiperiodic crystals // Scripta Metallurgica. – 1986. – Vol. 20. – P. 1193–1197.
 21. Hausdorff F. Dimension and äusseres Mass. // Math. Ann. – 1918. – Bd. 79. – S. 157–179.
 22. Ichikawa T. Rhee study of In-induced superstructures on Ge (111) surfaces // Surface Science. – 1981. – Vol. 111. – P. 227–259.
 23. Janssen T., Chapuis G., De Boissieu M. Aperiodic Crystals. From Modulated Phases to Quasicrystals. – Oxford : Oxford Science Publications, 2007. – 466 p.
 24. Kadanoff L.P. Scaling laws for Ising models near T_c^* // Physics. – 1966. – Vol. 2. – P. 263–272.
 25. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – N. Y. : Freeman, 1982. – 468 p.
 26. Mukamel D., Krinsky S. Physical realizations of $n \geq 4$ component vector models. I. Derivation of the Landau-Ginzburg-Wilson Hamiltonians // Phys. Rev. B. – 1976. – Vol. 13. – P. 5065–5077.
 27. Mukamel D., Krinsky S. Physical realizations of $n \geq 4$ component vector models. II. ϵ -expansion analysis of the critical behavior // Phys. Rev. B. – 1976. – Vol. 13. – P. 5078–5085.
 28. Mukhopadhyay N.K., Weatherly G.C., Lloyd D.J., Embury J.D. Diffraction studies of icosahedral phases in $Al_{70}Fe_{20}W_{10}$ // J. Non-Crystalline Solids. – 1993. – Vol. 153–154. – P. 63–67.
 29. Penrose R. Pentaplexity: A class of Nonperiodic Tilings of the Plane // Math. Intell. – 1979. – Vol. 2. – P. 32–37.
 30. Pauling L. So-called icosahedral decagonal quasicrystals are twins of an 820-atom cubic crystal // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 365–368.
 31. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 53. – P. 1951–1953.
 32. Shechtman D., Blech I. The microstructure of rapidly solidified Al_6Mn . Metall. Trans. Ser. A. – 1985. – Vol. 16. – P. 1005–1012.
 33. Weiering H., Heslinga D., Himba T. Structure and growth of epitaxial Pb on Si(111) // Phys. Rev. B. – 1992. – Vol. 45. – P. 5991–6002.
 34. Wilson R.G. Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 4. – P. 3174–3183.
 35. Wilson R.G. Renormalization group and critical phenomena. II. Phase-space cell analysis of critical behavior // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 4. – P. 3184–3205.
 36. Zhang X., Kelton K.F. High-order crystal approximant structures alloys $Ti_{54}Zr_{26}Ni_{20}$ // J. Non-Crystalline Solids. – 1993. – Vol. 153–154. – P. 114–118.